

Bài 1. (1 điểm) Biến đổi hpt về dạng:
$$\begin{cases} \left(4x + \frac{1}{x}\right) + \left(4y + \frac{1}{y}\right) = 1 \\ \left(4x + \frac{1}{x}\right)\left(4y + \frac{1}{y}\right) = -20 \end{cases}$$

Suy ra:
$$\begin{cases} 4x + \frac{1}{x} = 5 \\ 4y + \frac{1}{y} = -4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 4x + \frac{1}{x} = -4 \\ 4y + \frac{1}{y} = 5 \end{cases} \quad (0.5 \text{ điểm})$$

Vậy hệ có nghiệm: $(x, y) = \left(1, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, 1\right); \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. (0.5 điểm)

Bài 2. (2 điểm)

a) Ta chứng minh được: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ (0.25 điểm)

Từ giả thuyết: $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \sqrt{3}$. (0.75 điểm)

b) Ta có: $\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca = abc$. (0.5 điểm)

Ta lại có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \Rightarrow \sqrt{abc} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$. (0.5 điểm)

Bài 3. (1.5 điểm)

a) Gọi x là số ô đen trên mỗi hàng. Khi đó tổng số ô đen của bảng là 4x.

Do số ô đen trên các cột đôi một là khác nhau nên số lượng ô đen của các cột lần lượt là bốn trong năm số 0, 1, 2, 3, 4.

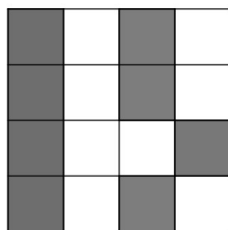
Mà tổng số ô đen là 4x, chia hết cho 4. Còn tổng $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 22$ chia 4 dư 2 nên trong tổng phải không có số 2.

Khi đó: $4x = 0 + 1 + 3 + 4 \Leftrightarrow x = 2$. (0.5 điểm)

b) TH1: Tính theo cột

Để thấy, trên cột có 4 ô đen hoặc 0 ô đen thì sẽ không có cặp tốt. Trên cột có 3 ô đen hoặc 1 ô đen thì có tối đa 2 cặp tốt. Vậy tối đa có 4 cặp tốt.

Cách tô với trường hợp tối đa như sau (0.5 điểm)



TH2: Tính theo hàng

Do mỗi hàng có 2 ô đen nên số cặp tốt trên mỗi hàng tối đa là 3. Mà có 4 hàng nên tối đa là 12. Ta sẽ chứng minh tối đa chỉ là 11.

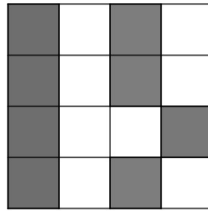
Thật vậy, giả sử có trường hợp tô là 12 cặp tốt thì mỗi hàng sẽ có đúng 3. Khi đó trên mỗi hàng ô đen và ô trắng sẽ xen kẽ.

Do có một cột cả 4 ô đều tô đen. Điều đó dẫn đến cột kế cột này, các ô phải đều tô màu trắng và tương tự 2 cột còn lại có 1 cột đều gồm ô đen, 1 cột đều ô trắng (trái giả thuyết).

Vậy tối đa số cặp tốt chỉ là 11.

Cách tô với trường hợp tối đa như sau

(0.5 điểm)



Bài 4. (2 điểm) Gọi $m^2 - n = 1$ (1) và $n^2 - m = a$ (2)

a) Từ (1) suy ra m, n khác tính chẵn lẻ. Nên a là số lẻ.

(0.5 điểm)

b) Chứng minh rằng nếu $a = 3 \cdot 2^k + 1$ với k là số nguyên dương thì $k = 1$.

Lấy (2) trừ (1) về theo về ta được: $(n - m)(n + m + 1) = 3 \cdot 2^k$.

(0.25 điểm)

Do $n - m$ lẻ nên

$$\text{TH1: } \begin{cases} n - m = 1 \Rightarrow n = m + 1 & (3) \\ n + m + 1 = 3 \cdot 2^k \end{cases}$$

Thế (3) vào (1) ta được: $m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow n = 3$.

Suy ra: $3 \cdot 2^k = n^2 - m = 6 \Rightarrow k = 1$

(0.25 điểm)

$$\text{TH2: } \begin{cases} n - m = 3 \Rightarrow n = m + 3 & (4) \\ n + m + 1 = 2^k \end{cases}$$

Thế (4) vào (1) ta được: $m^2 - m - 4 = 0(l)$.

(0.25 điểm)

c) Chứng minh rằng a không thể là số chính phương.

Giả sử a là số chính phương, đặt $a = b^2, b \in \mathbb{N}$.

Nhận xét nếu $a=0$ thì vô lí.

Nếu $a=1$, thế vào ta được: $\begin{cases} m^2 - n = 1 \\ n^2 - m = 1 \end{cases} \Rightarrow (m - n)(m + n + 1) = 0 \Rightarrow m = n$. Khi đó: $m^2 - m = 1(l)$

Ta xét với $a \geq 4$. Từ: $m^2 = n + 1 \Rightarrow m \geq 1$ và $n = m^2 - 1$.

Thay vào (2):

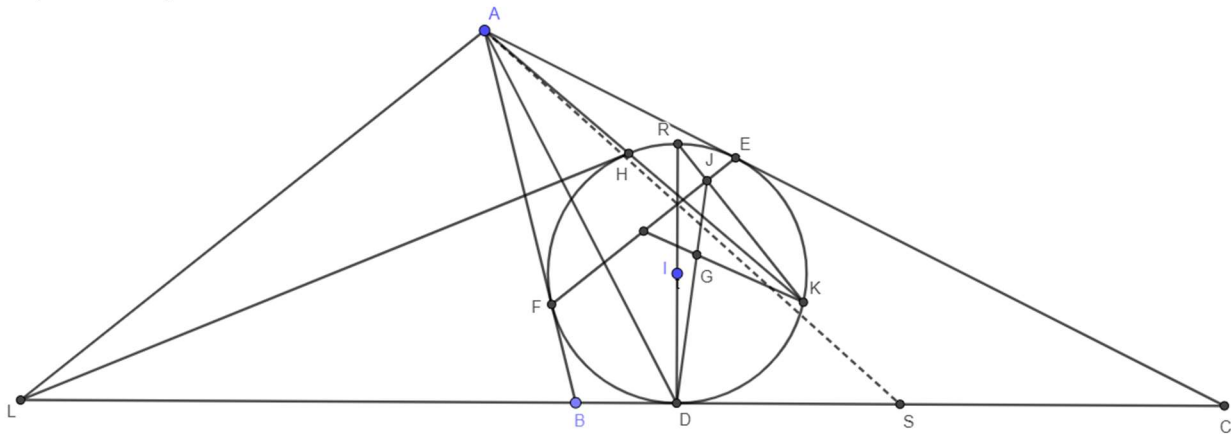
$$(m^2 - 1)^2 - m = b^2 \Leftrightarrow m = (m^2 - 1 - b)(m^2 - 1 + b) \Rightarrow m : (m^2 - 1 + b) \Rightarrow m \geq |m^2 - 1 + b|$$

Mà $m^2 - 1 + b \geq m^2 + 1 \geq 2m$ nên suy ra vô lí.

Vậy a không thể là số chính phương.

(0.75 điểm)

Bài 5. (3.5 điểm)



a) Do $\widehat{LAI} = \widehat{LHI} = 90^\circ$ nên A, H, I, L thuộc một đường tròn. **(1 điểm)**

b) Mà $\widehat{LDI} = 90^\circ$ nên A, H, D, I, L thuộc một đường tròn.

Khi đó: $\widehat{DAI} = \widehat{HAI}$ (do chắn hai cung bằng nhau).

Mà $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{CAH}$.

(1 điểm)

c) Do $\widehat{FAD} = \widehat{EAK}$ nên tứ giác EFDK là hình thang cân.

(0.25 điểm)

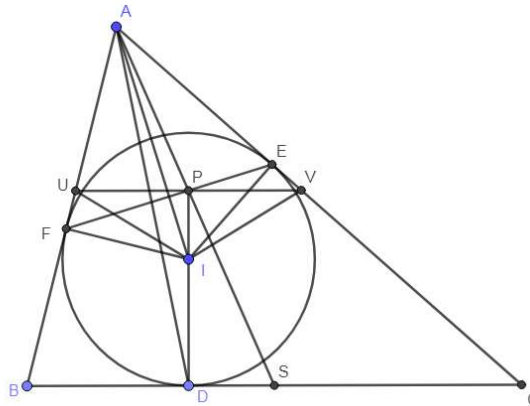
Gọi T, N lần lượt là trung điểm của EF và DK.

$$\text{Ta có: } \frac{TJ}{DK} = \frac{NG}{DK} = \frac{1}{2} \Rightarrow TJ = NK$$

Mà $TN \perp EF$ nên NKJT là hình chữ nhật, do đó $KJ \perp EF$.

(0.5 điểm)

d) Ta chứng minh bổ đề sau: Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với BC, CA và AB. S là trung điểm BC. Khi đó AS, DI và EF đồng quy.



Gọi P là giao điểm của EF và ID. Qua P kẻ đường thẳng song song BC cắt AB, AC lần lượt tại U, V.

Khi đó, các tứ giác IPUF và IPEV nội tiếp nên $\widehat{IUP} = \widehat{IFP} = \widehat{IEP} = \widehat{IVP}$.

Suy ra tam giác IUV cân, nên P là trung điểm UV.

Mà S là trung điểm BC, $UV \parallel BC$ nên A, S, P thẳng hàng. Vậy ba đường AS, DI và EF đồng quy.

Trở lại bài toán, để ý rằng $\widehat{DER} = 90^\circ$ nên D, I, R thẳng hàng. Theo bổ đề trên ta có DI, EF và AS đồng quy.

Do đó IR, EF và AS đồng quy.

(0.75 điểm)